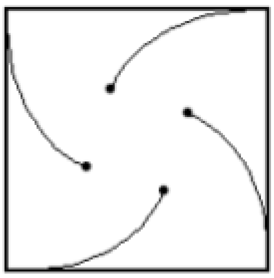
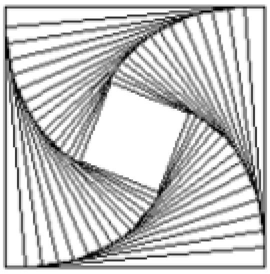
Problema delle formiche che si inseguono

a cura di Giancarlo Buccella

Quattro operose formiche partono dai quattro angoli di un quadrato di 6 metri di lato. Ogni formica si dirige verso quella alla sua destra muovendosi verso il centro a velocità costante di v = 1 cm/s.

Quanti minuti impiegheranno le formiche per incontrarsi al centro?

Proviamo a risolvere il problema in modo intuitivo ed elementare.

- Forma: **quadrato** ⇒ $N = 4$
- Lunghezza del lato: $L = 6\,\mathrm{m} = 600\,\mathrm{cm}$
- Velocità: $v = 1\,\mathrm{cm/s}$

<u>Simmetria del problema</u>: Il problema ha una simmetria rotazionale di 90 gradi. Le condizioni iniziali e le regole di movimento sono identiche per ogni formica rispetto alla sua "preda".

<u>Punto di convergenza</u>: A causa di questa simmetria, le formiche si muoveranno in modo tale da mantenere sempre la configurazione di un quadrato (che si rimpicciolisce e ruota). Alla fine, si incontreranno tutte contemporaneamente in un unico punto.

<u>Il centro è il punto di incontro</u>: L'unico punto che preserva la simmetria durante tutto il movimento e dove possono incontrarsi simultaneamente è il centro geometrico del quadrato iniziale.

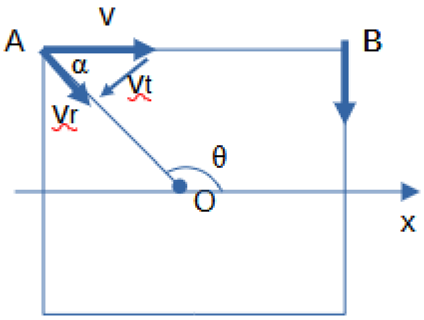
Polo della spirale: La traiettoria di ogni formica è una spirale logaritmica. Una spirale logaritmica $r = a\ e^{k\theta}$ si avvolge (o si svolge) attorno a un punto fisso chiamato polo, che corrisponde a r = 0. Nel caso delle formiche, il punto verso cui spiraleggiano e dove alla fine si incontrano è proprio questo polo.

Soluzione semplice

In ogni istante le quattro formiche stanno sui vertici di un quadrato che si rimpicciolisce e ruota man mano che le formiche si avvicinano fra di loro. Il percorso di ogni inseguitrice A è sempre perpendicolare al percorso dell'inseguita B. Questo significa che nel vettore moto di B non vi è alcuna componente che la fa avvicinare o allontanare da A. Di conseguenza A cattura B nello stesso tempo in cui l'avrebbe catturata se B fosse stata ferma. Perciò A percorre una distanza uguale al lato del quadrato per raggiungere B. Il tempo impiegato è:

$$t = \frac{L}{v} = \frac{600\,cm}{1cm/s} = 600\,s = 10\,\text{min}$$

Oppure



La distanza iniziale da coprire affinché la formica in A raggiunga il centro è r_0 = AO che è la metà della diagonale del quadrato che come noto vale d = √2 L, quindi

$$r_0 = \frac{d}{2} = \frac{\sqrt{2}L}{2}$$

La componente radiale della velocità è

$$v_r = v\cos\alpha = 1\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}cm/s$$

Il tempo occorrente per arrivare al centro lo ricaviamo direttamente dalla s = vt (moto rettilineo uniforme):

$$t = \frac{r_0}{v_r} = \frac{\sqrt{2}}{2}L\frac{1}{\sqrt{2}/2(cm/s)} = \frac{\sqrt{2}}{2}600(cm)\frac{1}{\sqrt{2}/2(cm/s)} = 600\,s = 10\,\text{min}$$

Vediamo che tipo di curva seguono le formiche. A tal uopo conviene usare le coordinate polari (r, θ), dove:

r(t) distanza dal centro al tempo t, (rispetto ad un punto fisso detto polo)

θ(t) angolo formato da r(t) rispetto ad un asse fisso, ad esempio l'asse x (orizzontale) al tempo t

Scomponiamo il vettore velocità, in coordinate polari, nelle due componenti tangenziale e radiale (vedi figura):

$$componenteradiale \quad v_r = \frac{dr}{dt} = -v\cos\alpha$$

$$componentetangenziale \quad v_t = r\frac{d\theta}{dt} = v\sin\alpha$$

dove il segno meno considera il moto verso il centro (r diminuisce quando t aumenta), ed α è l'angolo costante tra la direzione del moto e la direzione radiale (verso il centro). Nel seguente disegno si capisce la differenza fra i due angoli α e θ.

Data la simmetria del quadrato la direzione del moto (ossia della velocità) di A forma sempre un angolo costante perché il bersaglio (la formica inseguita) si muove in modo simmetrico. Quindi α = cost. Questa condizione rimane vera anche se si considera un generico poligono di N lati.

$$\frac{dr}{dt} = -v\cos\alpha$$

$$r\frac{d\theta}{dt} = v\sin\alpha$$

L'equazione della curva è data dalla relazione di dipendenza di r con θ, ossia $r(\theta)$, quindi calcoliamo la derivata di $dr/d\theta$, usando la regola della "catena di derivazione"

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{dr}{dt}\frac{dt}{d\theta} = \frac{dr/dt}{d\theta/dt} = \frac{-v\cos\alpha}{v\sin\alpha/r} = -\frac{r}{\tan\alpha}$$

Integrando

$$\int\frac{dr}{r} = -\int\frac{d\theta}{\tan\alpha}$$

$$\log r = -\frac{1}{\tan\alpha}\theta + c$$

$$r(\theta) = e^{-(\theta/\tan\alpha)+c} = e^c e^{-\theta/\tan\alpha}$$

Per $\theta = 0$ si calcola e^c

$$r(0) \equiv r_0 = e^c e^{-0} = e^c$$

Quindi l'equazione di spirale logaritmica è (ponendo $a = e^c$ e $b = 1/\tan\alpha$):

$$r(\theta) = ae^{-b\theta}$$

Per $\theta = 0$ si calcola e^c

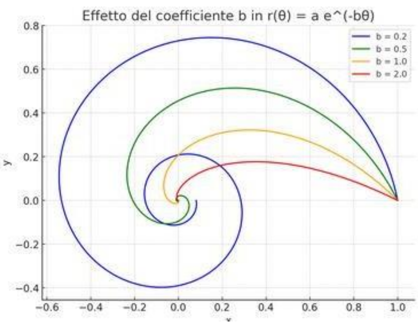
$$r(0) \equiv r_0 = e^c e^{-0} = e^c$$

E d'altronde nel nostro caso $\alpha = 45°$ quindi $\tan\alpha = 1$, quindi

$$r(\theta) = r_0 e^{-\theta}$$

Questa è l'equazione della spirale logaritmica seguita dalle quattro formiche.

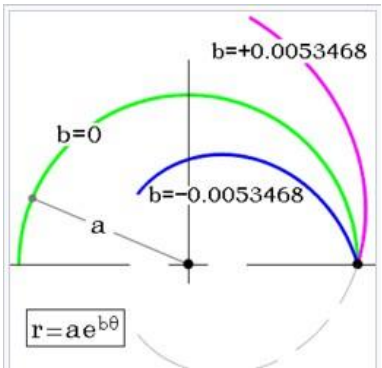
Significato del coefficiente b.

- 

Più grande è b, più rapidamente la spirale si avvolge verso l'origine.

Più piccolo è b, più la spirale è "lenta" e si estende più a lungo prima di stringersi.

In sintesi, b controlla la velocità di decadimento radiale: un valore alto fa restringere la curva più in fretta.



Confronto di tre tratti di spirali logaritmiche che si sviluppano partendo dallo stesso punto di distanza (a) dall'origine. Valore di b=0 per quello di colore verde, gli altri due hanno lo stesso valore assoluto di (b) con la differenza che per quello magenta è positivo (la curva si allontana indefinitivamente) mentre per quello blu è negativo (la curva si avvolge vero il polo).

Con il ridursi del valore del raggio vettore l'angolo percorso aumenta vieppiù, ed alla fine ponendo r = 0, ossia quando la formica raggiunge il centro, vediamo dalla formula $r = r_0\ e^{-\theta}$ che si avrebbe $0 = r_0\ e^{-\theta}$ e questo implicherebbe θ = infinito! Quindi dal punto di vista matematico la formica arriva la centro in 10 minuti compiendo infiniti giri intorno al centro del quadrato.

Considerazioni sul significato "infiniti" giri.

Innanzitutto notiamo che mentre la velocità con cui la formica si avvicina al centro (dr/dt) è costante: $dr/dt = -v /\surd\ 2$, /questo è il motivo per cui impiega un tempo finito per coprire la distanza radiale iniziale fino a zero), la velocità angolare aumenta in modo esponenziale, la velocità angolare $d\theta/dt$ infatti è inversamente proporzionale a r. Man mano che r (la distanza dal centro) si avvicina a zero, 1/r tende a infinito. Di conseguenza, $d\theta/dt$ tende a infinito.

Man mano che una formica si avvicina al centro:

I "giri" che compie diventano sempre più piccoli (la circonferenza di ogni giro tende a zero).

Il tempo impiegato per completare ciascuno di questi giri sempre più piccoli diventa anch'esso sempre più breve, tendendo a zero.

La velocità angolare (quanti gradi o radianti copre al secondo) diventa enormemente alta.

[Immagina una moneta che rotola in un imbuto a spirale di quelli che si trovano a volte per raccogliere fondi. La moneta raggiunge il buco centrale in un tempo finito. Ma, poco prima di cadere nel buco, la moneta compie moltissimi giri, sempre più velocemente, attorno al centro. Se l'imbuto fosse "perfetto" e seguisse una spirale logaritmica, il numero di giri sarebbe teoricamente infinito.]

Quando diciamo che la formica compie "infiniti giri", ci stiamo riferendo a ciò che il modello matematico idealizzato prevede.

Ecco come interpretare questa comparsa di questo infinito. <u>In fisica non esistono infiniti.</u>

Il Modello Matematico è un'astrazione:

L'equazione $r(\theta) = a\, e^{(-\theta)}$ descrive una curva perfetta. In questa astrazione matematica, r diventa esattamente zero solo quando θ diventa esattamente infinito.

Nel modello, trattiamo le formiche come punti adimensionali che possono avvicinarsi indefinitamente.

La Realtà Fisica ha dei Limiti:

<u>Dimensioni Finite:</u> Le formiche non sono punti. Hanno una dimensione fisica. Si incontreranno (o, più realisticamente, si scontreranno o si fermeranno l'una sull'altra) quando la distanza r tra loro e il centro diventa comparabile con la loro stessa dimensione. A quel punto, il concetto di "inseguire un punto" cessa di avere senso nel modo idealizzato.

Natura discreta della materia: a scale estremamente piccole, la natura continua dello spazio e del moto descritta dalla meccanica classica potrebbe non essere più un'approssimazione valida (anche se questo è ben oltre la scala del problema delle formiche).

Cosa Significa l'"Infinito" del Modello per la Fisica del Problema:

Tendenza al Limite: Il modello ci dice che, se le formiche fossero punti ideali e potessero continuare il loro moto indefinitamente secondo le regole date, allora compierebbero un numero illimitato di giri.

Comportamento Qualitativo: L'aspetto "infiniti giri" del modello matematico si traduce, nel mondo fisico, in un numero molto grande e rapidamente crescente di giri man mano che si avvicinano al punto d'incontro. L'ultima frazione di millimetro prima dell'incontro vedrebbe un numero enorme di rapidissime "micro-rotazioni".

Convergenza rapida: significa che la velocità angolare dθ/dt diventa estremamente alta vicino al centro. La formica gira "follemente" su sé stessa negli istanti finali prima dell'incontro.

Quando il Modello cessa di essere una buona descrizione: Il modello matematico della spirale logaritmica è un'eccellente descrizione del moto delle formiche fino a quando le loro dimensioni fisiche non diventano significative rispetto alle distanze in gioco. Quando sono a pochi millimetri (o meno) dal centro e l'una dall'altra, la premessa che "la formica A insegue il punto matematico della formica B" inizia a vacillare. La formica A inizierà a interagire con il corpo fisico della formica B.

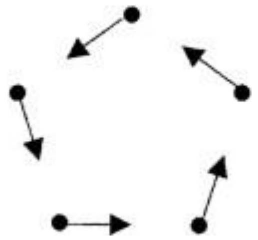
In sintesi:

Il modello matematico usa il concetto di infinito per descrivere il comportamento limite di un sistema idealizzato. Nel mondo fisico, questo "infinito" si traduce in un comportamento estremo (un numero molto elevato di giri, una velocità angolare molto elevata) che avviene in un intervallo di tempo e spazio estremamente piccolo, poco prima che le limitazioni fisiche (come la dimensione delle formiche) prendano il sopravvento e portino all'effettivo incontro "finito".

È un classico esempio di come un modello matematico possa fornire intuizioni profonde sul comportamento di un sistema, anche se le sue previsioni più estreme (come l'infinito) non sono presenti nella realtà fisica, esse indicano solo una tendenza.

Ora estendiamo il problema al caso generale di un poligono di N lati.

Consideriamo N formiche inizialmente poste ai vertici di un poligono regolare avente N lati di lunghezza L. Ad un certo istante esse iniziano a muoversi tutte insieme con velocità di modulo v e puntando istante per istante verso la formica più vicina, in questo modo esse si avvicineranno costantemente rimpicciolendo sempre più il poligono fino a che esso collassi nel suo centro. Calcolare il tempo occorrente affinché questo si verifichi e calcolare anche il numero di giri che ogni formica compie prima di arrivare al centro.



La velocità delle formiche può essere separata in una componente tangenziale, v_t e una radiale, v_r.

Il problema conserva una simmetria rotazionale di 2π/N radianti, questo è l'angolo sotteso dal due raggi consecutivi, in quanto l'angolo al centro viene diviso in N parti. Il triangolo AOB (supponiamo A e B due vertici consecutivi ed O centro del poligono) è isoscele con angoli alla base uguali indicati con α, mentre l'angolo al vertice è come già detto, 2π/N, dovendo essere la loro somma pari a 180°, si ha:

$$\pi = 2\alpha + \frac{\pi}{N}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{N}$$

La velocità radiale, proiezione del vettore v sul raggio, che sarà negativa perché punta verso il centro,

$$v_r = \frac{dr}{dt} = -v\cos\alpha = -v\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{N}\right)$$

Usando l'identità cos (π/2 – x) = sin x

$$v_r = \frac{dr}{dt} = -v\cos\alpha = -v\sin(\pi / N)$$

La componente tangenziale è

$$v_t = r\frac{d\theta}{dt} = v\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{N}\right)$$

Usando l'identità sin(π/2 – x) = cos x si ha

$$v_t = r\frac{d\theta}{dt} = v\cos(\pi / N)$$

Troviamo l'equazione della curva.

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{dr}{dt}\frac{dt}{d\theta} = \frac{dr / dt}{d\theta / dt} = \frac{-v\sin(\pi / N)}{v\cos(\pi / N) / r} = -r\tan(\pi / N)$$

$$\int \frac{dr}{r} = -\tan(\pi / N)\int d\theta$$
$$\log r = -\tan(\pi / N)\theta + c$$
$$r(\theta) = e^{-(\theta\tan(\pi / N) + c} = e^c e^{-\theta\tan(\pi / N)}$$

Con la posizione dell'istante iniziale r = 0 per θ = 0 si ha $r_0 = e^{-c}$

$$r(\theta) = r_0 e^{-\theta\tan(\pi / N)}$$

Calcoliamo il tempo occorrente alla formica per raggiungere il centro.

$$t = \frac{r_0}{|v_r|} = \frac{r_0}{|-v\sin(\pi / N)|}$$

Se L è il lato iniziale del poligono regolare di N lati, la distanza r_0 dal centro a un vertice è $r_0 = L / (2\sin(\pi/N))$.

Sostituendo:

$$t = \frac{r_0}{|v_r|} = \frac{L}{2v\sin^2(\pi / N)}$$

Si vede che ponendo N = 4 si riottiene la soluzione trovata per il quadrato t = L/v.

Vediamo infine la distanza totale percorsa: d = v t.

$$d = vt = v\frac{L}{2v\sin^2(\pi / N)} = \frac{L}{2\sin^2(\pi / N)}$$

Per un triangolo N = 3

$$d = \frac{L}{2\sin^2(\pi / 3)^2} = \frac{L}{2(\sqrt{3} / 2)^2} = \frac{2}{3}L = 0.67L$$

Per un quadrato N = 4

$$d = \frac{L}{2\sin^2(\pi / 4)^2} = \frac{L}{2(1/\sqrt{2})^2} = L$$

Per un pentagono N = 5

$$d = \frac{L}{2\sin^2(\pi / 5)^2} = \frac{L}{2(1/\sqrt{5-\sqrt{5}}/8)^2} = \frac{L}{2 \cdot (0.587)^2} = 1.45L$$

Come si vede la distanza percorsa è in funzione del numero dei lati del poligono.

Rimane inalterato il ragionamento precedente circa il tempo occorrente per arrivare al centro.

Nota

La spirale logaritmica, definita dalla funzione $r = a\,e^{k\theta}$ con k che può essere sia positiva che negativa, è una curva che appare in diversi fenomeni fisici e naturali grazie alle sue proprietà uniche, come il fatto che **l'angolo tra la tangente e il raggio è costante**. Ecco alcuni esempi fisici in cui la traiettoria segue una spirale logaritmica:

1. *Moto di un corpo sotto una forza centrale inversamente proporzionale al cubo della distanza*

Descrizione: In meccanica classica, se un corpo si muove sotto l'influenza di una forza centrale che varia come

$F \propto 1/r^3$, la traiettoria può essere una spirale logaritmica.

Esempio fisico: Questo tipo di forza può emergere in alcuni sistemi teorici, come un corpo carico in un campo elettrico o magnetico con specifiche condizioni. Ad esempio, un elettrone che si muove in un campo magnetico non uniforme con perdite di energia potrebbe approssimare una spirale logaritmica mentre si avvicina o si allontana dal centro.

Dettaglio: La forza $F = -k/r^3$ porta a un'equazione differenziale il cui risultato, in coordinate polari, dà una traiettoria del tipo $r = a\,e^{k\theta}$, dove (k) dipende dai parametri della forza e dalle condizioni iniziali.

2. *Crescita di strutture biologiche (es. conchiglie dei molluschi)*

Descrizione: Molte conchiglie di molluschi, come quelle del nautilus, crescono seguendo una spirale logaritmica. Questo accade perché l'organismo aggiunge materiale in modo proporzionale alla sua crescita, mantenendo un angolo costante rispetto al raggio.

Esempio: La conchiglia del nautilus cresce in modo che ogni nuova camera sia più grande della precedente secondo un fattore costante, formando una spirale logaritmica. Questo garantisce stabilità strutturale e distribuzione ottimale del peso.

Dettaglio: La spirale logaritmica è ideale in natura perché permette una crescita uniforme senza cambiare forma, un fenomeno noto come autosimilarità.

3. *Traiettorie di insetti attratti da una sorgente luminosa*

Descrizione: Alcuni insetti, come le falene, seguono una spirale logaritmica quando si avvicinano a una luce. Questo accade perché l'insetto cerca di mantenere un angolo costante rispetto alla sorgente luminosa (un comportamento chiamato fototassi), ma la sua traiettoria si curva a causa del movimento.

Esempio: Una falena che vola verso una lampada, cercando di mantenere un angolo fisso con i raggi di luce, finisce per seguire una spirale logaritmica, avvicinandosi sempre di più alla fonte luminosa.

Dettaglio: Se l'insetto volasse in linea retta, non seguirebbe una spirale, ma il suo metodo di navigazione (mantenere un angolo costante con la luce) porta a questa traiettoria.

4. *Dinamica dei bracci delle galassie a spirale*

Descrizione: I bracci di alcune galassie a spirale, come la Via Lattea, approssimano una spirale logaritmica. Questo è dovuto alla dinamica gravitazionale e alla rotazione differenziale delle stelle e del gas nella galassia.

Esempio fisico: Nella Via Lattea, i bracci spirali seguono una forma approssimativamente logaritmica con un angolo di inclinazione (pitch angle) costante, che è una caratteristica della spirale logaritmica.

Dettaglio: La spirale logaritmica emerge perché le onde di densità nella galassia si propagano in modo che le stelle e il gas si organizzano in una struttura a spirale con un'espansione proporzionale all'angolo.

5. *Movimento di particelle in un fluido con resistenza viscosa*

Descrizione: Una particella che si muove in un fluido viscoso, soggetta a una forza centrale e a una resistenza proporzionale alla velocità, può seguire una spirale logaritmica.

Esempio fisico: Un vortice in un fluido, come un mulinello in acqua o aria, può trascinare una particella leggera (ad esempio una foglia) lungo una traiettoria a spirale logaritmica mentre la particella perde energia e si avvicina al centro del vortice.

Dettaglio: La resistenza viscosa causa una dissipazione di energia, e la combinazione di questa forza con una forza centrale (come la pressione del fluido) può portare a una traiettoria a spirale logaritmica.

6. *Onde elettromagnetiche in mezzi particolari*

Descrizione: In alcuni sistemi ottici o elettromagnetici, come le onde che si propagano in mezzi con proprietà specifiche (es. mezzi anisotropi o con gradiente di indice di rifrazione), il percorso delle onde può seguire una spirale logaritmica.

Esempio fisico: In un esperimento con un metamateriale progettato per curvare la luce in modo particolare, il percorso di un raggio può assumere la forma di una spirale logaritmica.

Dettaglio: Questo accade quando il mezzo induce un angolo di rifrazione che cambia in modo esponenziale con la posizione, portando a una traiettoria curva simile a una spirale logaritmica.

Considerazioni finali

La spirale logaritmica è comune in natura e fisica perché rappresenta una soluzione ottimale per problemi che coinvolgono crescita, dissipazione di energia o movimento con vincoli geometrici